УДК 53.1

Е.В. Хоменко[1], В.Е. Новиков[2]

[1]*«РАДМИР» ДП АО НИИРИ, Харьков*
[2]*Институт электрофизики и радиационных технологий НАН Украины, Харьков*

АНАЛИЗ ОСЛАБЛЕНИЯ ИНТЕНСИВНОСТИ ПОТОКА РЕНТГЕНОВСКИХ КВАНТОВ ВО ФРАКТАЛЬНОЙ СРЕДЕ

В статье предложена математическая модель ослабления интенсивности потока рентгеновских квантов в среде, разработанная на основе квантового анализа и производных Джексона. Показана связь между физическим свойством ослабления потока квантов (неидеальностью среды) и геометрическими характеристиками распределения плотности среды (ее фрактальностью). Предложенная модель может эффективно применяться в случае с большим вкладом рассеянного излучения от материалов со сложной структурой (в частности, композитных защитных материалов) и точно переходит в традиционную модель с использованием фактора накопления для однородных сред. Построенная модель может использоваться при проектировании средств защиты от рентгеновского излучения и разработке алгоритмов выявления неоднородностей в сложных биологических объектах в цифровых комплексах рентгеновской диагностики.

интенсивность потока рентгеновских квантов, фрактальная среда

Введение

Описание ослабления интенсивности потока рентгеновских квантов в реальных средах (в рамках проблем медицинской диагностики и защиты от рентгеновского излучения) является сложной задачей статистической теории, учитывающей коллективный характер взаимодействия [1 – 3]. Уравнение переноса энергии по среде (т.е. по веществу, заполняющему физические тела) может быть получено из анализа вероятностей процессов взаимодействия рентгеновских квантов и вещества.

Частица, вылетающая из некоторой точки в заданном направлении с определенной энергией на пути x, может испытать рассеяние, поглощение или пройти путь без взаимодействия. Вероятности первых двух процессов (P_s, P_c) в однородной безграничной среде обычно предполагаются пропорциональными пройденному элементу пути dx:

$$dP_s = \mu_s dx\,;\; dP_c = \mu_c dx\,. \qquad (1)$$

При записи этих соотношений неявно предполагается, что все события взаимодействия статистически независимы (т.е. процессы являются марковскими).

Коэффициенты пропорциональности (зависящие от энергии квантов, а в случае неоднородности среды и от координат) называются, сечениями этих процессов [4]. Сумма сечений $\mu = \mu_s + \mu_c$ равна вероятности любого взаимодействия на единице длины пути, а вероятность пройти путь dx без взаимодействия равна $(1-\mu\,dx)$. Обозначим через $P(x)$ – вероятность того, что длина свободного пробега до первого столкновения равна x. Тогда, вероятность того, что частица пройдет путь $x+dx$ без столкновения будет равна произведению вероятностей:

$$P(x+dx) = P(x)(1-\mu dx)\,. \qquad (2)$$

Разлагая левую часть равенства (2) в ряд, приходим к дифференциальному уравнению переноса:

$$\frac{dP}{dx} = -\mu P\,; \quad P(0) = 1\,. \qquad (3)$$

Решение этого уравнения для бесконечной однородной среды имеет вид:

$$P(x) = \exp(-\mu x)\,, \qquad (4)$$

где μ – линейный коэффициент ослабления.

Теоретически значение ослабления интенсивности рентгеновского излучения в заданной точке пространства для заданных граничных условий и физических параметров вещества после взаимодействия может быть получено из решения сложных кинетических уравнений. Однако из-за сложности вычислений такой подход применяют в редких случаях. В связи с этим возрастает роль разработки адекватных физических и математических моделей для описания этих процессов. В линейном приближении для монохроматического излучения без учета структуры вещества используется простейшее уравнение переноса квантов в дифференциальной форме, следующей из уравнения (3) [1 – 4]:

$$D_x^1 I(x) = -\mu\, I(x)\,; \quad D_x^1 \equiv \frac{d}{dx}\,, \qquad (5)$$

и его точное решение в виде простого экспоненциального закона ослабления потока квантов $I(x)$ в зависимости от пройденной толщины вещества x:

$$I(x) = I_0 \exp(-\mu x)\,, \qquad (6)$$

где I_0 – начальная интенсивность потока рентгеновских квантов. Это уравнение хорошо описывает эволюцию интенсивности потока квантов при распространении в идеальных средах.

Отклонение среды от идеальности (т.е. учет процессов диссипации в среде, процессов эволюции в активных средах и средах со сложной неоднородной структурой) приводит к тому, что более адекватными физической ситуации становятся альтернативные определения операторов дифференцирования. Наиболее часто используемыми обобщениями являются дробные интегро-дифференциальные операторы и конечные аппроксимации дифференциальных операторов $D_h f(x) = \dfrac{f(x+h)-f(x)}{h}$. Применение операторов дробного порядка для описания процессов эволюции с учетом эффектов памяти изложено в работах [5, 6].

В настоящей работе основное внимание уделено процессам ослабления потока рентгеновских квантов во фрактальной среде. Обычно операторы производной определяются на основе операторов бесконечно малого сдвига $Df(x) = \lim\limits_{h\to 0} D_h f(x)$. Фрактальные среды обладают свойствами подобия основных характеристик при изменении пространственных масштабов. Поэтому для них естественным обобщением понятия производной является производная Джексона [7], в которой для определения скорости процесса вместо операторов сдвига используются операторы масштабирования (с коэффициентом подобия q):

$$D_q f(x) = \frac{f(qx)-f(x)}{qx-x}. \tag{7}$$

В предельном случае при $q \to 0$ производная Джексона переходит в обычную производную $Df(x) = \lim\limits_{q\to 1} D_q f(x)$. Ниже изложена модель процесса ослабления потока рентгеновских квантов во фрактальной среде на основе производных Джексона.

Математическая модель ослабления рентгеновских квантов во фрактальных средах

По сути, существующая теория взаимодействия рентгеновских квантов со средой построена на точном решении уравнения переноса для Марковских процессов в однородной среде и приближенных решениях, являющихся возмущениями решения для однородной среды. Проведем обобщение существующей теории на случай фрактальных сред. Основой классической теории идеальных сред является использование собственных функций оператора производной – экспоненциальной функции. Возникает вопрос, какие функции являются собственными функциями для операторов q-производных Джексона? На основе развития понятия q-производных построен, так называемый, квантовый анализ, в рамках которого получены обобщения многих важных математических соотношений. Например, квантовая q-производная степенной функции может быть вычислена go формуле:

$$D_q x^n = \frac{(qx)^n - x^n}{(q-1)x} = \frac{q^n - 1}{q-1} x^{n-1} = [n] x^{n-1}, \tag{8}$$

где $[n] = \dfrac{q^n - 1}{q-1}$ и $\lim\limits_{q\to 1}[n] = n$. Достаточно просто вычисляется производная от функции, обладающей свойством подобия. Пусть $f(qx) = q^{\alpha} f(x)$, тогда

$$D_q f(x) = \frac{\left(q^{\alpha} f(x)\right) - f(x)}{(q-1)x} = \frac{q^{\alpha}-1}{q-1}\frac{f(x)}{x} = [\alpha]\frac{f(x)}{x}.$$

Собственная функция производной Римана – экспонента e^x имеет разложение в степенной ряд, коэффициенты которого выражаются через факториал $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} \dfrac{x^k}{k!}$. В квантовом анализе широко используется q-обобщение экспоненты e_q^x, в степенном разложении которой функция $k!$ заменяется ее обобщением – $[k]!$:

$$[k]! = \begin{cases} 1, & k = 0; \\ [k][k-1]....[k], & k \ge 1. \end{cases} \tag{9}$$

То есть, используется представление для q-экспоненты в виде степенного ряда:

$$e_q^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^n}{[k]!}. \tag{10}$$

Такое определение приводит к тому, что функция e_q^x является собственной функцией оператора D_q:

$$\begin{gathered} D_q e_q^x = D_q\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{x^k}{[k]!}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{[k]!} D_q\left(x^k\right) = \\ = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{[k]}{[k]!}x^{k-1} = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{[k-1]!}x^{k-1} = e_q^x. \end{gathered} \tag{11}$$

Обобщенная экспоненциальная функция e_q^{-x} с ростом аргумента x спадает медленнее, чем обычная экспонента, что показано на рис. 1.

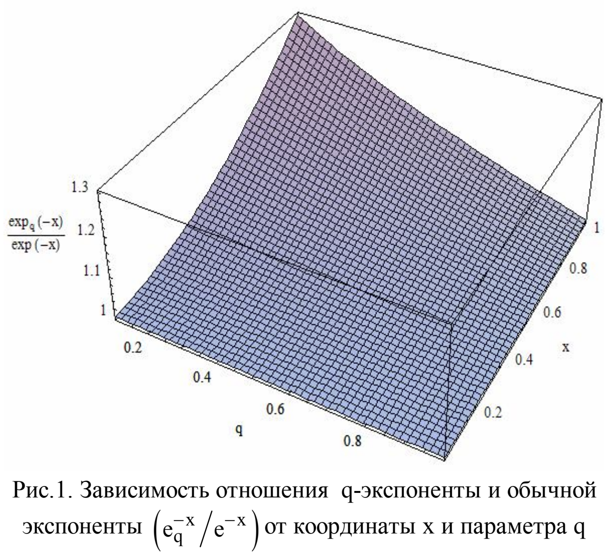

Рис.1. Зависимость отношения q-экспоненты и обычной экспоненты $\left(e_q^{-x}/e^{-x}\right)$ от координаты x и параметра q

Уравнение переноса (5) во фрактальной среде приобретает такой же вид, но с заменой обычной производной на производную Джексона:

$$D_q I(x) = -\mu I(x), \tag{12}$$

а его точное решение можно записать через q-экспоненту:

$$I(x) = I_0 e_q^{-\mu x}. \tag{13}$$

Ниже мы покажем, что фрактальность среды (и, определяющееся этим, использование производных Джексона) связана с неидеальностью среды (т.е. с дополнительным усилением или затуханием потока в среде). Отметим, что уравнение переноса потока энергии электромагнитных квантов (5) является следствием не только вероятностных представлений, но и прямым следствием волнового уравнения для электромагнитного поля. Для того, чтобы наиболее ясно продемонстрировать взаимосвязь фрактальности и неидеальности среды, рассмотрим уравнение для пучка электромагнитных волн с электрическим полем $\vec{E}$ и частотой ω, распространяющегося вдоль оси x в среде с неоднородной диэлектрической проницаемостью $\varepsilon_0(x)$:

$$\Delta E + \frac{\omega^2}{c^2}\varepsilon_0(x) E = 0, \tag{14}$$

где c – скорость света; а $\Delta = \Delta_\perp + \frac{\partial^2}{\partial^2 x}$ – лапласиан в цилиндрических координатах $(r_\perp, x)$; поперечный лапласиан – $\Delta_\perp = \frac{1}{r_\perp}\nabla_\perp(r_\perp \nabla_\perp)$; $\nabla_\perp = \frac{\partial}{\partial r_\perp}$ – поперечный градиент. Если ввести комплексную амплитуду поля $\vec{A}(x)$ с помощью соотношения $E = A(x)\exp(i(\omega t - kx))$ + компл. сопр., то из волнового уравнения (14) в коротковолновом, высокочастотном приближении для этой амплитуды получим известное параболическое уравнение геометрической оптики (см., например, [8]):

$$2ik\frac{\partial A}{\partial x} = \Delta_\perp A, \tag{15}$$

где коэффициент $k = \omega / c$, символ $\perp$ обозначает дифференциальные операции по поперечным координатам (по отношению к направлению распространения потока). Чтобы перейти к вещественным величинам введем вещественную амплитуду A_0 и эйконал ψ:

$$A = A_0 \exp(-ik\psi). \tag{16}$$

Тогда из уравнения (15) следуют уравнения геометрической оптики:

$$2\frac{\partial \psi}{\partial x} + (\nabla_\perp \psi)^2 = \frac{1}{k^2 A_0}\Delta_\perp A_0;$$

$$\frac{\partial A_0}{\partial x} + (\nabla_\perp \psi)(\nabla_\perp A_0) + \frac{1}{2}A_0 \Delta_\perp \Psi = 0. \tag{17}$$

Если предположить поток цилиндрически симметричным относительно оси x, то в цилиндрических координатах можно ввести угол наклона ϑ луча к оси x с помощью соотношения $\vartheta = \nabla_\perp \psi$ и интенсивность потока излучения $I(x) = A_0^2$. Тогда уравнения геометрической оптики (17) в этих переменных приводятся к системе из уравнения первого порядка для угла $\frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \vartheta(\nabla_\perp \vartheta) = 0$ и уравнения переноса для интенсивности потока:

$$\frac{\partial I}{\partial x} + \vartheta \nabla_\perp I + \left(\nabla_\perp \vartheta + \frac{1}{r_\perp}\vartheta\right) I = 0. \tag{18}$$

Таким образом, уравнение переноса интенсивности излучения (подобное уравнению (5)) является следствием уравнений Максвелла для потока электромагнитного излучения. Поэтому кроме обобщения уравнения переноса (уравнения первого порядка) для фрактальной среды естественно рассмотреть обобщение и волнового уравнения (уравнения второго порядка для колебательных процессов в среде). Такое обобщение позволит наиболее просто связать значения коэффициента подобия параметра q с активностью или пассивностью среды.

Как для рассмотрения колебательных процессов в обычных средах естественны тригонометрические функции на основе обычных экспонент, так во фрактальных средах важны обобщения тригонометрических функций на основе q-экспонент (10). В рамках квантового анализа вводятся новые функции:

$$\cos_q(x) = \frac{e_q^{ix} + e_q^{-ix}}{2}; \quad \sin_q(x) = \frac{e_q^{ix} - e_q^{-ix}}{2i}. \tag{19}$$

Воспользовавшись полученными выше соотношениями (11) для квантовой производной обобщенной экспоненты легко получить, что функции, введенные с помощью соотношений (19), удовлетворяют подобным соотношениям для стандартных тригонометрических функций:

$$D_q \cos_q(x) = -\sin_q(x), \quad D_q \sin_q(x) = \cos_q(x). \tag{20}$$

Эти q-функции переходят в обычные тригонометрические функции при $q \to 1$, однако с увеличением отклонения параметра неэкстенсивности q от единицы усиливается отклонение характера поведения функций $\sin_q(x)$, $\cos_q(x)$ от поведения обычных тригонометрических функций. На рис. 2 изображен график функции $\sin_q(x)$ и фазовая траектория для колебательного процесса, который описывается такой функцией. Из рис. 2 видно, что колебательный процесс, описывающийся q-тригонометрическими функциями, имеет характер диссипативного процесса. С приближением параметра q к 1 уменьшается зависимость амплитуды колебаний от времени (тем самым, происходит приближение среды к идеальной). Проанализируем более подробно эту связь.

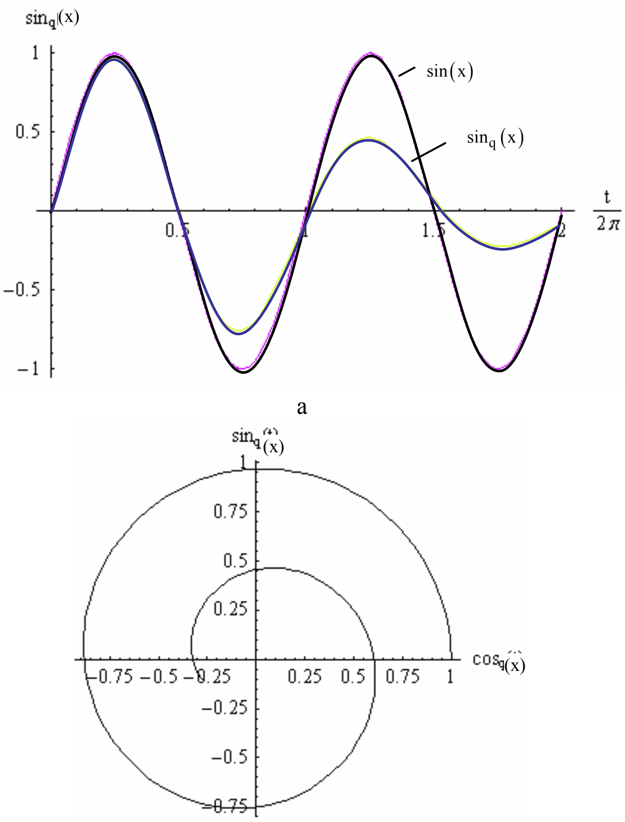

Рис. 2. Простейший колебательный процесс во фрактальной среде: а – графики функций sin|x| и $\sin_q|x|$ для q = 0,95; б – фазовая траектория функции $\sin_q|x|$ q = 0,95

Рассмотрим простейший колебательный процесс во фрактальной среде, который описывается уравнением для фрактального осциллятора с использованием производных Джексона:

$$D_q\left(D_q E(x)\right)+k^2 E(x)=0, \qquad (21)$$

общим решением которого является функция:

$$E(x)=C_1 \sin_q(kx)+C_2 \cos_q(kx). \qquad (22)$$

Приведенный на рис. 2 случай соответствует начальным условиям $f(0)=0$ и $D_q f(0)=1$, для которых $E(x) = \sin_q|kx|$. Колебательный процесс во фрактальной среде в каком-то смысле соответствует колебательному процессу в однородной среде, но в присутствии диссипации, т.е. функция E(x) подобна колебательному процессу g(x), описывающемуся уравнением в обычных производных для осциллятора с затуханием δ:

$$D_x^1\left(D_x^1 g(x)\right)-\delta D_x^1 g(x)+k^2 g(x)=0. \qquad (23)$$

Линейное уравнение имеет точное решение:

$$g(x)=e^{-\delta x}\sin(kx+\Delta\varphi). \qquad (24)$$

Параметры подобия и затухания связаны соотношением, которое определим из условия максимального совпадения фазовых траекторий в квадратичной метрике. Результат такой оптимизации приведен на рис. 3, на котором представлена зависимость коэффициента фрактальности q от коэффициента затухания α.

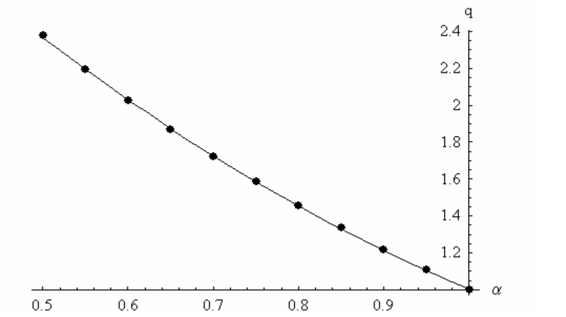

Рис. 3. График взаимосвязи коэффициента затухания α и коэффициента фрактальности q

Таким образом, из сравнения колебаний во фрактальной среде (которые описываются волновым уравнением в производных Джексона) и колебаний в неидеальной среде без фрактальной структуры получена зависимость параметра фрактальности от свойств неидеальности среды. В предельном случае отсутствия фрактальности (q = 1) осуществляется переход к обычному экспоненциальному ослаблению потока в конденсированной среде с регулярной структурой.

Для определения коэффициента фрактальности среды можно использовать данные по ослаблению рентгеновских потоков в различных средах с априорно известной структурой, либо при фиксированной внутренней структуре среды управлять уровнем рассеянного излучения, приходящего в заданную точку путем изменения характеристик потока квантов. Использование значения коэффициента фрактальности и линейного коэффициента ослабления потока μ позволяет определить параметры ослабления потока для среды с известной структурой.

Выводы

Предложена математическая модель ослабления интенсивности потока рентгеновских квантов в среде на основе квантового анализа и квантового же обобщения экспоненциальной функции. Показана связь между физическим свойством ослабления потока квантов (неидеальностью среды) и статистическими геометрическими характеристиками распределения плотности среды (ее фрактальностью). Эта модель более адекватна физическим процессам переноса энергии в средах со сложной структурой и точно переходит в традиционную модель с использованием фактора накопления для однородных сред. Построенная модель может использоваться при проектировании средств защиты от рентгеновского излучения и разработке алгоритмов выявления неоднородностей в сложных биологических объектах в цифровых комплексах рентгеновской диагностики.

Список литературы

1. Хараджа Ф.Н. Общий курс рентгенотехники. – М.: Энергия, 1966. – 340 с.

2. Основы рентгенодиагностической техники / Под ред. Н.Н. Блинова. – М.: Медицина, 2002. – 360 с.

3. Рентгенотехника: Справочник. В 2-х кн. Кн. 1. / Под общей редакцией В.В. Клюева – М.: Машиностроение, 1992. – 450 с.

4. Кольчужкин А.М., Учайкин В.В. Введение в теорию прохождения частиц через вещество. – М.: Атомиздат, 1978. – 260 с.

5. Хоменко Е.В. Немарковская теория ослабления потока рентгеновских квантов в веществе / Вісник Міжнародного слов'янського університету. Технічні науки. – Х.. – 2006. – Т. 9, № 1. – С. 33-37.

6. Хоменко Е.В. , Новиков В.Е. Эволюция распределения рентгеновских квантов по энергиям при взаимо действии их потока в веществе // Системи обробки інформації. – Х.: ХУ ПС. – 2006. – Вип.. 8 (57). – С. 96-100.

7. Кац В.Г., Чен П. Квантовый анализ – М.: МЦНПО, 2005. – 126 с.

8. Виноградова М.Б., Руденко О.В., Сухоруков А.П. Теория волн. – М.: Наука, 1990. – 240 с.

Поступила в редколлегию 00.00.2007

Рецензент: д-р техн. наук. проф. И.А.Черепнев, Харьковский национальный технический университет им. П. Василенко, Харьков